UFR Sciences

Année : 2012-2013
Examen médian
Date de l'épreuve :
26-10-2012

Licence deuxième année de Mathématiques
Examen partiel
Code de l'épreuve : ULM3A
Nom de l'épreuve : Analyse 2
Durée de l'épreuve : 2 heures

Avertissement

L'utilisation de documents et de la calculatrice est interdite.

- La qualité du raisonnement tiendra une part importante dans l'appréciation des copies. On veillera donc à répondre aux questions en faisant un raisonnement structuré et précis.
- Dans un même exercice, on pourra répondre à une question en admettant les résultats des questions précédentes.
- Vous pourrez traiter les exercices dans l'ordre de votre choix.

L'épreuve se compose de questions de cours et de 4 exercices rigoureusement indépendants entre eux.

QUESTIONS DE COURS.

(1) Rappeler la définition de la borne supérieure et inférieure d'une partie D de $\mathbb{R}$.

(2) Enoncer rigoureusement sans le démontrer le théorème caractérisant la continuité en un point à l'aide de suites.

(3) Est-il identique de noter $\lim(u_n) = \ell$ et $u_n \sim \ell$?

(4) On considère des suites de réels strictement positifs.
De $u_n \sim v_n$, peut-on conclure $u_n^{1/3} \sim v_n^{1/3}$? et $u_n^n \sim v_n^n$?

(5) Soient deux suites de réels vérifiant $u_n \sim v_n$. La relation "(u_n) à termes positifs" entraîne-t-elle que v_n est à termes positifs à partir d'un certain rang ?

EXERCICE I.

(1) Donner un développement limité à l'ordre 2 de

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}}$$

en 0, $+\infty$ et $-\infty$.

Indication. Pour les limites en $\pm\infty$, on réécrira $f(x)$ en terme de $1/x$.

(2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (\cos(x) + x)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \arctan(x) - x^4}{\cos(x^2) - 1}.$$

EXERCICE II.

Etudier la convergence et déterminer le cas échéant la limite des suites de nombres réels $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

(1) $u_n = \dfrac{n^{10}}{10^n}$

(2) $u_n = \sqrt[n]{n}$

(3) $u_n = \dfrac{n}{n+1}\cos(n\pi)$.

EXERCICE III.

Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta}.$$

Déterminer les couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la série numérique $\sum u_n$ est convergente (on étudiera séparément les cas $\alpha < 0,\quad \alpha = 0$ et $\quad \alpha > 0$).

Présenter le résultat dans un tableau.

EXERCICE IV.

On pose, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}.$$

(1) Que peut-on dire du signe de u_n ?

(2) Est-ce que la série de terme général u_n vérifie le théorème des séries alternées ?

(3) Pour étudier la série de terme général u_n, on la met sous la forme

$$a_n \times \frac{1}{\sqrt{1+b_n}},$$

où a_n et b_n sont des termes de séries alternées.

En effectuant un développement limité en $\dfrac{1}{n}$ à l'ordre 1, du terme $\dfrac{1}{\sqrt{1+b_n}}$, étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.